

**Partie A**

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.

Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

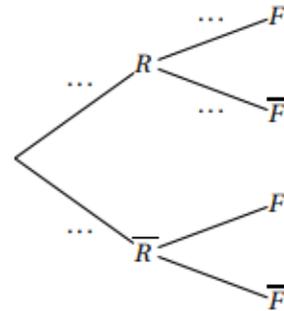
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- $R$  : « le client est un client régulier » ;
- $F$  : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement  $E$  quelconque, on note  $\bar{E}$  son évènement contraire et  $P(E)$  sa probabilité.

1.
  - a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
  - b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
  - c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
  - d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que  $P(F) = 0,38$ .

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à  $10^{-3}$  près.

- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire  $X$ ? Justifier.
- b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

**Partie B**

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note  $Y_1$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.

On admet que son espérance  $E(Y_1)$  est égale à 30 000 et que sa variance  $V(Y_1)$  est égale à 100 000.

On note  $X_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note  $Y_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.

On admet que  $X_2$  suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que  $Y_2 = 50X_2$ .

1. Calculer l'espérance  $E(X_2)$  de la variable  $X_2$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note  $Y = Y_1 + Y_2$  la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires  $Y_1$  et  $Y_2$  sont indépendantes.

On note  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \frac{Y}{1000}$ .

2. Préciser ce que modélise la variable  $Z$  dans le contexte de l'exercice.

Vérifier que son espérance  $E(Z)$  est égale à 53,5 et que sa variance  $V(Z)$  est égale à 0,722 75.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que  $Z$  soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.