

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les événements contraires de A et T .

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4.
 - a. Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
 - b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $p(E) = 0,0625$.

1. On suppose que $n = 50$.
 - a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.
 - b. Calculer $P(X = 7)$.
 - c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geq 10)$ soit supérieure à 0,95?

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.