1. Exercice 2 (4 points)

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune *k* boules, où *k* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la manière suivante :

le joueur lance le dé,

* s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1 ;

* s'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2 ;

* si le numéro amené par le dé n'est ni 1 ni un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 ».

B : « Le dé amène un multiple de 3 ».

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 ».

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer *k* pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, *k* est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties, indépendantes les unes des autres. Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} près la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.