Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.
Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ.
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.
2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.
   Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_B. En donner la valeur arrondie à l'unité.
3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
   Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Partie B

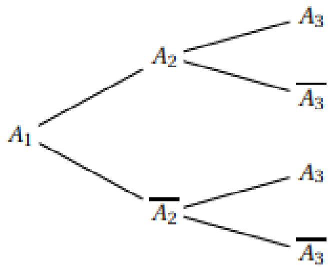
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
   b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (p_n).