Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$.
On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; −1) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$

2. **a.** On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B(0 ; −1) est une primitive de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
   a. Déterminer l'expression de $g(x)$.
   b. Soit m un réel strictement positif.
   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de m.
   c. Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} I_m$.
4. **a.** Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$,
   $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.
   c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.
   d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ en laissant apparents les traits de construction.
   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.

Annexe 1 (Exercice 1) :