

Commun à tous les candidats

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».

La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les événements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »

B : « La bouteille d'eau provient de la source B »

S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
4. Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type 1,6.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ .

1. Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre 6,4 mg et 9,6 mg.
2. Calculer la probabilité $p(X \leq 6,5)$.
3. Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est 0,1.

Partie C

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = a \cos x$ avec $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $(0; \frac{a}{2})$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?

