

*Les deux parties sont indépendantes*

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

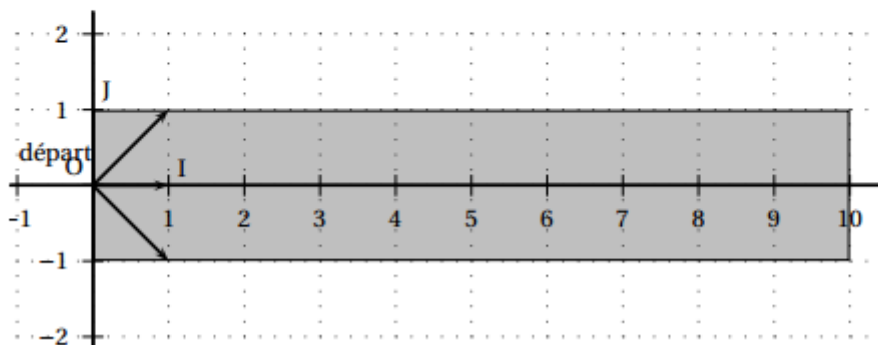
- Soit il avance d'un pas tout droit;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit);
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité  $p$  de l'évènement  $S$  « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

#### Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées  $(0; 0)$  au début de la traversée. On note  $(x; y)$  les coordonnées de la position de Tom après  $x$  déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de  $x$  déplacements :

```

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que  $y \geq -1$  et  $y \leq 1$  et  $x \leq 9$ 
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur  $y + n$ 
    Affecter à x la valeur  $x + 1$ 
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
  
```

1. On donne les couples suivants :  $(-1; 1)$ ;  $(10; 0)$ ;  $(2; 4)$ ;  $(10; 2)$ .  
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est  $(x; y)$  », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

**Partie B**

Pour tout  $n$  entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

$A_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée  $-1$  ».

$B_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».

$C_n$  l'évènement « après  $n$  déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités respectives des évènements  $A_n, B_n, C_n$ .

1. Justifier que  $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  compris entre 0 et 9, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \\ c_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités  $p(A_1)$ ,  $p(B_1)$  et  $p(C_1)$ .
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de  $a_n, b_n, c_n$  pour  $n$  compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

| $n$ | $a_n$     | $b_n$     | $c_n$     |
|-----|-----------|-----------|-----------|
| 0   | 0         | 1         | 0         |
| 1   | 0,333 333 | 0,333 333 | 0,333 333 |
| 2   | 0,222 222 | 0,333 333 | 0,222 222 |
| 3   | 0,185 185 | 0,259 259 | 0,185 185 |
| 4   | 0,148 148 | 0,209 877 | 0,148 148 |
| 5   | 0,119 342 | 0,168 724 | 0,119 342 |
| 6   | 0,096 022 | 0,135 802 | 0,096 022 |
| 7   | 0,077 275 | 0,109 282 | 0,077 275 |
| 8   | 0,062 186 | 0,087 944 | 0,062 186 |
| 9   | 0,050 043 | 0,070 772 | 0,050 043 |
| 10  | 0,040 272 | 0,056 953 | 0,040 272 |