Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de faç on équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

   A l'évènement « l'étudiant répond A »,

   B l'évènement « l'étudiant répond B »,

   C l'évènement « l'étudiant répond C »,

   R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

   $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

   a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$.

   c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

   a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

   b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.

   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

   c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

   i. Donner les paramètres de cette loi normale.

   ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
   On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.