1) RAPPELS

$\emptyset$ est appelé événement impossible : $p(\emptyset) = 0$
Ω est appelé événement certain : $p(\Omega) = 1$

Dans le cas d'une loi équiprobable (la probabilité des événements élémentaires est la même), la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{nombre\ \ de\ \ cas\ \ favorables}{nombre\ \ de\ \ cas\ \ total}$$

L'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est constitué des événements de Ω n'appartenant pas à A
On a :$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Soient A et B deux événements de Ω
On note $A \cap B$ l'événement A et B composé des événements élémentaires de A et de B
c'est à dire losrsque A et B sont réalisés simultanément.
On note $A \cup B$ l'événement A ou bien B constitué des événements élémentaires de A ou bien de B.
On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément.
On a donc $p(A \cap B) = 0$

2) PROBABILITE CONDITIONNELLE

Soit A un événement de l'univers Ω muni de la loi P tel que $P(A) \neq 0$.
On définit sur Ω une nouvelle loi de probabilité notée P_A en posant pour tout événement B

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

P_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. On note encore $P_A(B) = P(B/A)$, probabilité de B sachant A.

Remarque

Comme $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
La réalisation de $A \cap B$ s'obtient en réalisant A, puis B sachant que A est réalisé.

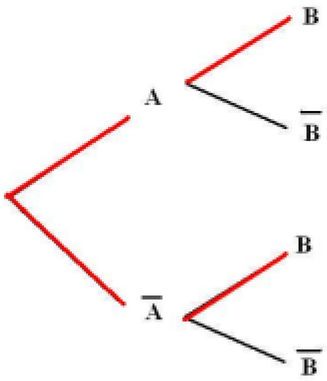
3) PROBABILITE TOTALE

On considère des évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formant une partition de l'univers Ω (leur réunion donne Ω et ils sont deux à deux disjoints et non vide).
Alors pour tout événement B,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)=P(A_1 \cap B)+P(A_2 \cap B)+\cdots+P(A_n \cap B),$$

avec pour tout i pris entre 1 et n, $P(A_i \cap B)=P(A_i)\times P_{A_i}(B)$.

on donc $p(B) = P(A_1)\times P_{A_1}(B) + P(A_2)\times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)\times P_{A_n}(B)$



Rédaction type :
D'après la **formule des probabilités totales** :
$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$
$\quad = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

4) EVENEMENTS INDEPENDANTS

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Cela revient à dire que si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = P(B)$.
(il est naturel de dire que A et B sont indépendants si la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A)

5) VARIABLES ALEATOIRES

• Soit X une variable aléatoire, dont l'ensemble des valeurs prises est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
La loi de probabilité de X est simplement la donnée, pour chaque x_i, de la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$ constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par X est x_i.
On la présente généralement sous la forme d'un tableau :

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	1

Les nombres p_i vérifient les conditions : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ avec $p_i = P(X = x_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

• Dans la pratique, on suit plus ou moins cette démarche. On regarde d'abord l'image d'événements élémentaires, puis on détermine $X(\Omega)$. Enfin, pour chaque x_i, on calcule la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$.

L'espérance de X est le nombre réel noté $E(X)$ qui est défini par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Remarques

• L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. En effet, si on répète l'expérience et qu'à chaque fois on note la valeur obtenue, la moyenne de ces valeurs tend vers $E(X)$ quand le nombre de répétitions tend vers l'infini.

• L'espérance est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de X.

• Si l'on ajoute la valeur k à toutes les valeurs de X, on ajoute k à $E(X)$. Si l'on multiplie par k toutes les valeurs de X, on multiplie $E(X)$ par k.

La **variance** de X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i \text{, soit}$$
$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

L'**écart type** de X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On a aussi

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right) - E(X)^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n - E(X)^2.$$

6) <u>LOI BINOMIALE</u>

Soit n un entier naturel non nul et p un réel tel que $0 < p < 1$

Si on effectue n épreuves successives , indépendantes et identiques avec 2 issues possibles : succès avec une probabilité p et échec avec une probabilité 1-p

alors c' est un schéma de bernouilli

si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours des n épreuves

X suit une loi binomiale de paramètres n et p

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on appelle **coefficient binomial** et on note $\binom{n}{k}$ ou bien C_n^k le nombre de chemins de l'arbre pondéré correspondant à k succès dans un schéma de Bernouilli de n épreuves répétées

c'est à dire le nombre de chemins correspondant à une liste de k succès parmi n épreuves répétées.

Pour tout entier k tout entier n tels que $0 \leq k \leq n$, si on a $p(S) = p$ et $P(E) = p(\overline{S}) = 1 - p$, la probabilité d'obtenir k succès parmi n est :

$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors E(X) = np

V(X) = np(1-p)