

Les parties A et B sont indépendantes

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie B

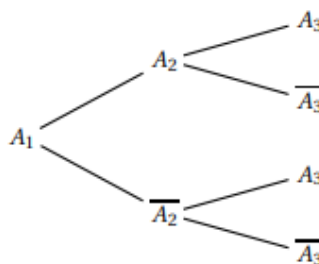
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1.
 - a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
 - b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
 - c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.
 - b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
 - c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (p_n) .