

96 Nouvelle-Calédonie novembre 2003

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $E(S_n)$ est égale à 10. Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p , puis justifier l'égalité $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

2. a. Établir l'égalité $\ln[P(S_n = 0)] = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$.

- b. Démontrer que $P(S_n = k+1) = P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

- c. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ pour $0 \leq k \leq n$, alors on a également

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10} \frac{10^{k+1}}{(k+1)!} \text{ pour } 0 \leq k+1 \leq n.$$

- d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!} \text{ où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leq k \leq n.$$

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $P(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.