TS **PROBABABILITE** feuille 39

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

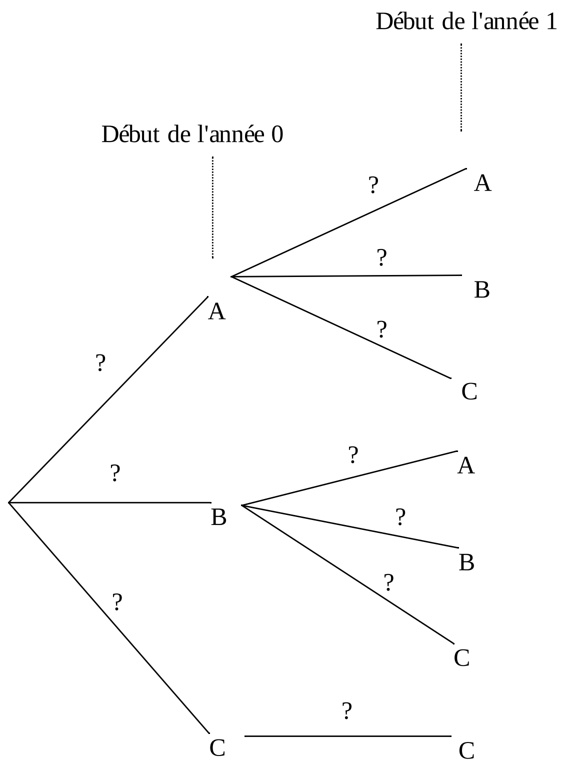
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la *n*-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la *n*-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la *n*-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des vénements A_n, B_n et C_n. Compte tenu de la composition initiale de la végétation (année 0), on pose $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interro-gation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel *n* non nul : $\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$.

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur N par :

$$S_n = p_n + q_n \text{ et } D_n = p_n - q_n.$$

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).

Interpréter le résultat.

Christophe navarri
www-maths-paris.com