TS **PGCD , NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX**

Propriété - Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b, on le note PGCD(a ; b).

Exemple 2

Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 15 est {1 ; 3 ; 5 ; 15}
Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 12 est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}
L'ensemble des diviseurs communs à 12 et à 15 est donc D(12 ; 15) = {1 ; 3}
On a donc PGCD(15 ; 12) = 3
De même il est immédiat que PGCD(2 ; 4) = 2 et PGCD(3 ; 5) = 1
En écrivant l'ensemble des diviseurs de 159390 et l'ensemble des diviseurs de 49005, on peut obtenir PGCD(159390 ; 49005) = 495 (Exemple 1)

Remarque

a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de -a.
On pourra étendre, si besoin est, la notion de PGCD à des nombres entiers relatifs.
On dira par exemple que PGCD(-15 ; 12) = PGCD(15 ; 12) = 3

Propriétés

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On a PGCD(a ; b) / a ; PGCD(a ; b) / b ; PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a)
Si b divise a, on a PGCD(a ; b) = b , en particulier PGCD(a ; 1) = 1 et PGCD(a ; a) = a

Exemple 3

6 est un diviseur de 18 donc PGCD(6 ; 18) = 6

Propriété

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. (On a $a = b \times q + r$)
Alors Si r = 0, PGCD(a ; b) = b
Si $r \neq 0$, PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)

Exemple 4

Pour trouver le PGCD de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804
$2414 = 804 \times 3 + 2$
On en déduit alors PGCD(2414 ; 804) = PGCD(804 ; 2)
Il est immédiat que PGCD(804 ; 2) = 2 car 2 divise 804. Donc PGCD(2414 ; 804) = 2

Propriété - Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On définit la suite r_n d'entiers naturels de la façon suivante :

$r_0 = b$; r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b

Pour $n \geq 1$: si $r_n = 0$ alors $r_{n+1} = 0$

si $r_n \neq 0$ alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$

On a PGCD(a ; b) = r_{n_0}

Remarque

En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives: de a par b, puis du diviseur par le reste, ...
le premier reste non nul est le PGCD de a et de b. C'est l'algorithme d'Euclide
Suivant les nombres a et b, le nombre d'itérations à effectuer peut être plus ou moins grand.
Sachant que PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a) on aura toujours intérêt à prendre b £ a

Exemple 4

Pour déterminer le PGCD de 410258 et de 126 écrivons les divisions euclidiennes successives :

410258 = 126 x 3256 + 2
126 = 2 x 63 + 0

Donc PGCD(410258 ; 126) = 2

Pour déterminer le PGCD de 15648 et de 657 écrivons les divisions euclidiennes successives :

15648 = 657 x 23 + 537
657 = 537 x 1 + 120
537 = 120 x 4 + 57
120 = 57 x 2 + 6
57 = 6 x 9 + 3
6 = 3 x 2 + 0

Donc PGCD(15648 ; 657) = 3

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Remarque

- Deux nombres sont donc premiers entre eux s'ils n'ont d'autres diviseurs communs que 1 et -1.
- On dit aussi que a est premier avec b, ou que b est premier avec a.
- On dit aussi parfois que a et b sont étrangers.

Rappel

On dit qu'un entier naturel non nul p est premier si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p.

Propriété

Soit a un entier relatif non nul.
Si p est un nombre premier qui ne divise pas a, alors PGCD(a ; p) = 1,
c'est-à-dire que a et p sont premiers entre eux.
(Si p est un nombre premier, p est premier avec tout entier qui n'est pas un de ses multiples)

Exemple 2

Démontrons que la fraction $\frac{12866}{13}$ est irréductible, c'est-à-dire que 12866 et 13 sont premiers entre eux.
La division euclidienne de 12866 par 13 peut s'écrire 12866 = 989 x 13 + 9 .
Donc 12866 n'est pas divisible par 13.
Comme 13 est un nombre premier, on en déduit que 12866 et 13 sont premiers entre eux, c'est-à-dire que la fraction $\frac{12866}{13}$ est irréductible.

Théorème de Bezout

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Remarque

Le théorème de Bezout est particulièrement intéressant pour travailler sur des expressions littérales ou sur des grands nombres.
En utilisant l'algorithme d'Euclide démontrons que 383 et 127 sont premiers entre eux et déterminons des entiers relatifs u et v tels que $383u + 127v = 1$
On peut écrire $383 = 127 \times 3 + 2$ (1)
et $127 = 2 \times 63 + 1$ (2)
Donc PGCD(383 ; 127) = 1 c'est-à-dire que 383 et 127 sont premiers entre eux.
Pour déterminer les entiers relatifs u et v, l'idée est d'exprimer le 1 qui apparaît comme reste de la dernière division en fonction des nombres 383 et 127.
D'après l'égalité (2), on peut écrire $1 = 127 - 2 \times 63$ (3)
D'après l'égalité (1), on peut écrire $2 = 383 - 127 \times 3$
En remplaçant 2 par $383 - 127 \times 3$ dans l'égalité (3), on obtient :
$1 = 127 - [383 - 127 \times 3] \times 63 = 127 - 383 \times 63 + 127 \times 3 \times 63 = 127(1 + 3 \times 63) - 383 \times 63$
On obtient alors $383 \times (-63) + 127 \times (190) = 1$. On peut donc prendre $u = -63$ et $v = 190$.
Le couple (u ; v) d'entiers relatifs n'est pas unique, on peut vérifier que les couples (u ; v) = (64 ; -293) (u ; v) = (-317 ; 956) sont aussi des couples répondant à la question.

Théorème de Gauss

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.
Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs et p un nombre premier.
Si p divise le produit ab, alors p divise a ou p divise b.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux et soit n un entier naturel.
Si n est divisible par a et par b, alors n est divisible par le produit ab.

Exemple 4

Si un nombre est divisible par 5 et par 6, alors il est divisible par 30. (puisque 5 et 6 sont premiers entre eux)

Propriété

Soient a , b des entiers relatifs non nuls et D un entier naturel non nul.
$D = \text{PGCD}(a\ ;\ b) \Leftrightarrow \dfrac{a}{D}$ et $\dfrac{b}{D}$ sont des entiers relatifs non nuls premiers entre eux.
$\Leftrightarrow$ $a = Da'$ et $b = Db'$ a' et b' étant deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux.