1. Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A

On note *P* le point d'affixe $p=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *Q* le point d'affixe $q=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et *K* le point d'affixe –1.

1. a. Montrer que les points *P* et *Q* appartiennent au cercle Γ de centre *O* et de rayon 1.

b. Faire une figure et construire les points *P* et *Q*.

2. a. Déterminer l'ensemble D des points *M* d'affixe *z* tels que $|z|=|z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

b. Montrer que *P* et *Q* sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B

On considère trois nombres complexes non nuls *a*, *b* et *c*. On note *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives *a*, *b* et *c*.

On suppose que l'origine *O* du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle *ABC*.

1. a. Montrer que $|a|=|b|=|c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$.

b. Montrer que *a* +*b* +*c* = 0.

c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{b}{a}+1\right|=1$.

d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a}=p$ ou $\frac{b}{a}=q$.

2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a}=p$ et $\frac{b}{a}=q$.

a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=\frac{c-a}{b-a}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle *ABC*.