EXERCICE 2 **enseignement obligatoire**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0\,;\, 2\pi]$. On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe $f(M) = MA \times MB$.
   - **a.** Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :
   $$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha.$$
   - **b.** Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
   - **c.** En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.
3. **a.** En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

   b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.