

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + i)z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2 + 2i$.

Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement $A' = F(A)$ et $F(B) = A$.

2. Méthode de construction de l'image de M .

- a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

- b. Établir que pour tout complexe z distinct de ω , $\frac{z' - z}{\omega - z} = -i$.

Soit M un point distinct de Ω .

Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\vec{M\Omega}, \vec{MM'})$.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M .

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

- a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ , des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$.

Vérifier que B est un point de Γ .

- b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1 + i)(z + 2 - 2i).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A' et de rayon 2.

Placer O, A, B, A', Γ et Γ' sur une même figure.