

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n , on appelle M_n le point du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n .

1. Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n . Montrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
3. a. Montrer, pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes :
 - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
 - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.
 En déduire que la distance $M_n M_{n+4}$ vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$, est équilatéral.
 On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.
4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.