

EXERCICE 2**4 points**

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2-iz}{1-z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions 1 et 2.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2i$.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose $z' = f(z)$.

a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i , z en fonction de z' .

b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).

Montrer que $OM = \frac{M'C}{M'D}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i .

c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

d. Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).