

EXERCICE 1**5 points****Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2 , associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}.$$

1. Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y .

On vérifiera que $\Re(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y+2)^2}$.

En déduire la nature de :

- l'ensemble E des points M d'affixe z , tels que Z soit un réel;
 - l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
 - Représenter ces deux ensembles.
2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.
En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.
3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.