

**EXERCICE 2****5 points****Enseignement obligatoire**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par E l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z^3$  soit un nombre réel positif ou nul.

- Le point A d'affixe  $a = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  appartient-il à E ?
  - On note B le point d'affixe  $b = -1 + i\sqrt{3}$ .  
Calculer un argument de  $b$  et montrer que B appartient à E.
- On suppose  $z \neq 0$  et on note  $\theta$  un argument de  $z$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\theta$  pour que  $z^3$  soit un nombre réel positif.
- Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
- À tout point  $P$  d'affixe  $z \neq 0$ , on associe les points  $Q$  d'affixe  $iz$  et  $R$  d'affixe  $z^4$ .  
On note F l'ensemble des points  $P$  tels que l'angle  $(\vec{OQ}, \vec{OR})$  ait pour mesure  $-\frac{\pi}{2}$ .  
Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.