Exercice 1

θ est un réel quelconque, on considère, dans **C**, l'équation :

$E_{(\theta)}$: $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)\,z + 5 + 4\cos\theta = 0$.

1°) Résoudre dans **C**, les équations $E_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ et $E_{\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_C = \overline{z_B}$, $z_D = \overline{z_A}$.

a) Déterminer les formes algébriques des affixes des points puis placer les points dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD.
c) En déduire que ces points appartiennent à un cercle Γ dont on donnera une équation.

3°) a) Résoudre dans **C**, l'équation $E_{(\theta)}$.

b) Démontrer que les points qui ont pour affixes les solutions de $E_{(\theta)}$ sont les points de Γ.