

Exercice (8 points)**Partie A**

On considère le polynôme $P(z)$ de la variable complexe z :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - i)z^2 + 2(1 - 2i)z - 4i.$$

- Calculer $P(i)$ et $P(\sqrt{2})$.
- Déterminer le réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
- En déduire une factorisation de $P(z)$.
- Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes : $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

1°) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = 2i$.

2°) Déterminer l'affixe du point D définie par $\vec{OD} = -2\vec{OA}$ puis placer D.

3°) Montrer que l'affixe du milieu I de [CD] est : $z_I = 1$.

4°) a) Calculer les nombres complexes $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$.

b) Calculer le module et un argument de ces deux nombres.

c) En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

d) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (C).