

EXERCICE 1

A tout complexe z on associe le complexe : $P(z) = 2z^2 + z + 5\bar{z}$.

1°) Calculer $P(1 + i)$.

2°) Démontrer que si $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

alors l'équation $P(z) = 0$ équivaut au système :
$$\begin{cases} x(x+3) - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$$

3°) En déduire la résolution dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 2

1°) Pour tout nombre complexe Z , on pose : $P(Z) = Z^4 - 1$.

a) Factoriser $P(Z)$ dans \mathbb{R} .

b) En déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$ dans \mathbb{C} .

c) En déduire les solutions de l'équation :
$$\left(\frac{2z-1}{z+1} \right)^4 = 1 \text{ dans } \mathbb{C}.$$

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm)

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 \qquad b = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \qquad \text{et } c = \bar{b}$$

b) Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.