TS **NOMBRES COMPLEXES** feuille b6

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n \left(1 + i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1°) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2°) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n.

4°) a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$.

Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit un triangle ABC, on note O le centre de son cercle circonscrit.

Dans un repère orthonormal de centre O, on note a, b et c les affixes des points A, B et C.

Soit H le point d'affixe $h = a + b + c$.

1°) Démontrer que $|a| = |b| = |c|$.

2°) a) Soit w = $\overline{b}c - b\overline{c}$. Calculer $w + \overline{w}$.

En déduire que w est un imaginaire pur.

b) Démontrer, à l'aide du a), que les nombres $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})$ et $\dfrac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs.

3°) a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

b) En utilisant les résultats précédents, démontrer que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

c) Expliquer, sans calculs supplémentaires, pourquoi H est l'orthocentre du triangle ABC.