

I/ Equation complexe.

Soit $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (25 + 30i)z - 125i$.

1°) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

2°) Déterminer trois réels a , b et c tels que $P(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3°) En déduire toutes les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

4°) Soient A , B et C les images dans le plan complexes $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Placer les points A , B et C dans le plan complexe et démontrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O .

II/ Ensembles de points.

Soient A et B deux points du plan complexes $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives : $z_A = 2i$ et $z_B = -4$.

A tout point M d'affixes z du plan complexe privé de B , on associe le point M' d'affixes z' tel que :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + 4}$$

1°) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $z' = i$.

2°) a) Pour tout complexe z différent de -4 , on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x , y , x' et y' réels.

Déterminer x' et y' en fonction de x et de y .

b) En déduire l'ensemble (E_2) des points M tels que z' soit un réel ainsi que l'ensemble (E_3) des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

3°) a) Interpréter géométriquement $\left| \frac{z - 2i}{z + 4} \right|$

b) En déduire l'ensemble (E_4) des points M tels que $|z'| = 1$.

4°) Placer les points A et B ainsi que les ensembles (E_1) , (E_2) , (E_3) et (E_4) trouvés dans les questions précédentes dans le plan complexes $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.