IV/ Equations et plan complexe

1°) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

2°) a) Soit : $P(z) = z^3 - (3 + i\sqrt{3})z^2 + 3(1 + i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{3} = 0$

Déterminer un nombre imaginaire pur solution de l'équation P(z) = 0.

b) En déduire une factorisation de P(z) puis toutes les solutions de l'équation : P(z) = 0.

On donnera ces solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3°) Soit A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Placer les points A, B et C dans le plan complexe et déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

I/ Soit (E) l'équation : $z^2 - (1 + 2i)\, z - 2\, (1 - 2i) = 0$

1°) Démontrer que (E) possède une solution réelle.

2°) En déduire toutes les solutions de (E) dans C.

II/ Soient A et B les points d'affixes $z_A = -2 + 4i$ et $z_B = 2i$.

A tout point M d'affixe z, M distinct de B, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z + 2 - 4i}{z - 2i}$

1°) Déterminer les points M du plan tels que M = M'.

2°) On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' soit réel.

c) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

3°) a) Interpréter géométriquement | z' |.

b) En déduire l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que | z' | = 1.

4°) Représenter les solutions du 1°) et les ensembles (E_1), (E_2) et (E_3) dans le plan complexe.

Exercice 2

Soit (E) l'équation complexe : $iz^2 - 2\,\overline{z} + 2 - i = 0$.

1°) On pose : $z = x + iy$ avec x et y réels, démontrer que (E) équivaut au système : $\begin{cases} x + xy - 1 = 0 \\ x^2 - (y-1)^2 = 0 \end{cases}$

2°) En déduire la résolution de l'équation (E).