

EXERCICE 1

Soit α un réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

On considère l'équation (E) suivante d'inconnue complexe z

$$(1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha)$$

1) Soit z une solution de (E), montrer que

$$|1 + iz| = |1 - iz|$$

2) En déduire que z est réel

3) Exprimer le nombre complexe $\frac{1 - i \tan \alpha}{1 + i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$

4) Soit z un réel, on pose $z = \tan \phi$ avec $\phi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation d'inconnue ϕ :

$$e^{i6\phi} = e^{i2\alpha} \quad \text{Résoudre cette équation}$$

5) Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de l'équation (E)

EXERCICE 2

Pour tout réel $x \in]0; \pi]$, on pose

$$S = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \dots + \cos(nx)$$

$$S' = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots + \sin(nx)$$

1) Exprimer $S + iS'$ en fonction de $z = e^{ix}$

2) En déduire alors la valeur de S et S'