I/ ***Ensembles de points*** : *(10 pts)*

On note I le point d'affixe i dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal. (unité 2 cm)

A tout point M du plan, distinct de I, on associe le point d'affixe : $\varphi(z) = \dfrac{z - i}{\bar{z} + i}$

1°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2 + i$ et $z_4 = 1 + 2i$.

Calculer $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2)$, $\varphi(z_3)$ et $\varphi(z_4)$.

2°) a) Démontrer que l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\varphi(z) = 1$

est la droite d'équation : $y = 1$, privée de I.

b) Démontrer que l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\varphi(z) = i$

est la droite d'équation : $y = x + 1$, privée de I.

3°) Soit $z = x + iy$ avec x et y réels.

a) Exprimer, pour tout $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,1)$ la partie réelle et la partie imaginaire de $\varphi(z)$.
b) Déterminer et représenter l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $\varphi(z)$ soit réel.
c) Déterminer et représenter l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur.

4°) a) Rappeler les formules du cours liant $|\,\bar{z}\,|$ et $\arg(\bar{z})$ à $|\,z\,|$ et à $\arg(z)$.

b) En déduire la valeur de $|\,\varphi(z)\,|$ et démontrer que : $\arg(\varphi(z)) = 2\arg(z - i)\ [2\pi]$.

c) Démontrer que, pour tout points M et M' (distincts de I) d'affixes respectives z et z', on a :

$\varphi(z) = \varphi(z')$ si et seulement si : I, M et M' sont alignés.