<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). On prendra pour unité graphique 1 cm.

1°) Question de cours

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : | z | = $\|\vec{w}\|$ et arg(z) = $(\vec{u}, \vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a) Démontrer que : $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)$.

b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$.

2°) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$.

Placer ces points sur la figure.

3°) Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = (1 + 2i)\, z - 2 - 4i$.

a) Préciser les images des points A et B par f.

b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4°) a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$z' - z = -2i(2 - i - z)$.

b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{M\Omega}}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{M\Omega}}, \overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right)$.

c) Quelle est la nature du triangle ΩMM' ?

d) Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$, écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.