Exercice 1

1°) Soit (E) l'équation : $z^2 - 3\sqrt{3}z + 9 = 0$.

a) Résoudre dans **C** l'équation (E).(On notera z_1 et z_2 ses solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$).
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et de z_2.

2°) Soit $P(x)$ le polynôme complexe : $P(z) = z^3 - 3(i+\sqrt{3})z^2 + 9(1+i\sqrt{3})z - 27i$.

a) Calculer $P(i)$.
b) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique racine imaginaire pure.
c) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z-3i)(az^2 + bz + c)$.
d) En déduire toutes les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

3°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $z_A = 3i$, $z_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ et $z_C = \overline{z_B}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm)

a) Faire une figure.
b) Calculer $z' = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme algébrique.
c) Déterminer le module et un argument de z'.
d) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ et la nature du triangle ABC.