

Exercice 1 (8 points)

Soit φ l'application de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans \mathbb{C} définie par : $\varphi(z) = \frac{iz + 3}{z - 1}$

Partie A – Quelques valeurs.

1°) Calculer $\varphi(5 + 3i)$ et $\varphi(-1 + 6i)$.

2°) Résoudre $\varphi(z) = 2$.

A tout point M du plan complexe d'affixe $z \neq 1$ on associe le point M' d'affixe z' tels que :

$$z' = \varphi(z)$$

On note : (E_1) l'ensemble des points M tels que : $|z'| = 1$.

(E_2) l'ensemble des points M tels que : z' soit réel.

(E_3) l'ensemble des points M tels que : z' soit imaginaire pur.

Le but de l'exercice est de déterminer ces ensembles de points par deux méthodes différentes

Partie B – Méthode algébrique.

Soient x, y, x', y' les réels tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1°) a) Exprimer $|iz + 3|$ et $|z - 1|$ en fonction de x et de y .

b) En déduire une équation cartésienne et la nature de l'ensemble (E_1) .

2°) a) Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .

b) En déduire une équation cartésienne des ensembles (E_2) et (E_3) .

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E_2) et (E_3) .

Partie C – Méthode géométrique.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 3i$ et $z_B = 1$.

1°) Interpréter géométriquement : $|z'|$ en fonction de A, B et M.

2°) Interpréter géométriquement : $\arg(z')$ en fonction de A, B et M.

3°) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E_1) , (E_2) et (E_3) .