

**Exercice 3** ( 9 points)

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $f(z) = \frac{z+3}{z-i}$

**Partie A – Quelques valeurs.**

1°) Calculer  $f(1)$  et  $f(2i)$ .

2°) Résoudre  $f(z) = 2$ .

A tout point  $M$  du plan complexe d'affixe  $z \neq i$  on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tels que :  
 $z' = f(z)$

On note :  $(E_1)$  l'ensemble des points  $M$  tels que :  $|z'| = 1$ .

$(E_2)$  l'ensemble des points  $M$  tels que :  $z'$  soit réel.

$(E_3)$

Le but de l'exercice est de déterminer ces ensembles de points par deux méthodes différentes

l'ensemble des points  $M$  tels que :  $z'$  soit imaginaire pur.

**Partie B – Méthode algébrique.**

Soient  $x, y, x', y'$  les réels tels que  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ .

1°) a) Exprimer  $|z+3|$  et  $|z-i|$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .

b) En déduire une équation cartésienne et la nature de l'ensemble  $(E_1)$ .

2°) a) Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .

b) En déduire une équation cartésienne des ensembles  $(E_2)$  et  $(E_3)$ .

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $(E_2)$  et  $(E_3)$ .

**Partie C – Méthode géométrique.**

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = -3$  et  $z_B = i$ .

1°) Interpréter géométriquement :  $|z'|$  en fonction de  $A, B$  et  $M$ .

2°) Interpréter géométriquement :  $\arg(z')$  en fonction de  $A, B$  et  $M$ .

3°) Retrouver par une méthode géométrique la nature et les éléments caractéristiques de  $(E_1)$ ,  $(E_2)$  et  $(E_3)$  obtenus dans la partie B.