

## EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point A d'affixe 2 et le cercle  $\mathcal{C}$  de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note  $\alpha$  le nombre complexe  $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$  et  $\bar{\alpha}$  le nombre complexe conjugué du nombre complexe  $\alpha$ .

1.
  - a. Démontrer que  $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$ .
  - b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ .
2. Soit D un point du cercle  $\mathcal{C}$  d'affixe  $2e^{i\theta}$  où  $\theta$  est un nombre réel de l'intervalle  $] -\pi ; \pi ]$ .
  - a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
  - b. Justifier que le point E a pour affixe  $z_E = \alpha e^{i\theta}$ .
3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].
  - a. Justifier que le point F a pour affixe  $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ .
  - b. On admet que le point G a pour affixe  $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$ .

Démontrer que  $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$ . On pourra utiliser la question 1. a.

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du côté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que  $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-\pi ; +\pi]$  par  $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$ .

Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi ; +\pi]$ . Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture? Justifier.

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$f$		↘	↗	↘

ANNEXE 2 (Exercice 4)  
(à rendre avec la copie)

