

EXERCICE 1**5 points**

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A , B et C sont les points d'affixes respectives i , $-i$ et $-3i$.

À tout point M d'affixe z ($z \neq -3i$) on associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 1}{z + 3i}.$$

1. Déterminer les points M pour lesquels $M' = M$.
2. Montrer que pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a : $\frac{z' + i}{z' - i} = 2 \frac{z + i}{z - i}$.
3. Soit Π l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$.
 - a. Déterminer et construire Π (préciser les éléments permettant cette construction). Vérifier que C appartient à Π .
 - b. Montrer, en utilisant 2, que si M appartient à $\Pi - \{C\}$, alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.