

EXERCICE 2

points

1. Calculer les racines complexes z_1 et z_2 de l'équation :

$$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0.$$

z_1 désignant la racine de partie imaginaire positive.

2. Soit θ le nombre réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan \theta = 3$.

Montrer que z_1 et z_2 sont égaux respectivement à $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{10 \cos \theta}$ et $\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{10 \cos \theta}$.

3. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = z_1^n + z_2^n.$$

Montrer que v_n est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n et θ .

4. Montrer que $10 \cos \theta = \sqrt{10}$. Majorer $|v_n|$, puis en déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.