

EXERCICE 1**4 points**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

On note f l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

On a donc aussi $z' = \frac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z .

1. Montrer que O , M et M' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f .
Vérifier que l'ensemble Γ contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i .
3. Soient $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, E le milieu de $[AB]$ et $E' = f(E)$.
Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.
Montrer que E' appartient à $\mathcal{C}$.
4. Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB) , on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f .
 - a. Déterminer une équation de la droite (AB) .
On pose $k = OM^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels.
Exprimer k en fonction de x .
Montrer que M' appartient à $\mathcal{C}$ (on pourra exprimer x' et y' en fonction de x et k).
 - b. Dédire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M .