

## EXERCICE 2

5 points

## Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  [unité graphique 2 cm].

À tout complexe  $z$ , distinct de 4, on associe le nombre :

$$Z = \frac{iz - 4}{z - 4}.$$

On note A le point d'affixe 4 et on considère l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  du plan, distincts de A, et d'affixe  $z$  telle que  $Z$  soit un nombre réel.

On se propose de déterminer et de construire cet ensemble  $\mathcal{C}$  par deux méthodes différentes.

## 1. Méthode analytique

- a. On pose :  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$  avec  $x, y, X, Y$  réels. Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- b. Écrire une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$ . Reconnaître la nature de  $\mathcal{C}$  et caractériser cet ensemble. Construire  $\mathcal{C}$ .

## 2. Méthode géométrique

On considère le point B d'affixe  $-4i$ .

- a. Vérifier que  $\frac{iz - 4}{z - 4}$  est réel si et seulement si le nombre  $\frac{z + 4i}{z - 4}$  est imaginaire pur. On pourra remarquer que :

$$iz - 4 = i(z + 4i).$$

- b. Quelles sont les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{BM}$  ? En interprétant géométriquement la condition ci-dessus, établir que  $M$  appartient à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{BM}$  sont orthogonaux.

En déduire la nature de  $\mathcal{C}$ , et caractériser cet ensemble.