EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0.$$

a. Vérifier que 8 est solution de cette équation.
Déterminer les nombres réels α, β et γ tels que, pour tout nombre complexe Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z-8)\left(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma\right).$$

b. Résoudre alors l'équation (E)

2. $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan orienté (unité : 1 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}, \quad b = 2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = 8.$$

a. Calculer le module de a, $|a|$ et donner un argument de a.

b. Calculer le nombre complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument φ. En déduire, la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le barycentre D des points pondérés (A, $|a|$), (B, $|b|$), (C, $|c|$). Placer D.

d. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Tracer Γ.