1. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On appelle *f* l'application qui à tout point M d'affixe *z* différente de –1, fait correspondre le point M' d'affixe $\frac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par *f* de la droite Δ d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=-\frac{1}{2}$, $z_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{2}+i$ et $z_{\mathrm{C}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points A' = *f*(A), B' = *f*(B) et C' = *f*(C) et placer les points A', B'et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit *g* la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe *z*, fait correspondre le point M_1 d'affixe *z* + 1.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation *g*.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par *g* de A, B et C et tracer la droite Δ_1, image de la droite Δ par *g*.

c. Démontrer que Δ_1 est l'ensemble des points M d'affixe *z* telle que $|z-1|=|z|$.

3. Soit *h* l'application qui, à tout point M d'affixe *z* non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(A_1)$ = A', $h(B_1)$ = B' et $h(C_1)$ = C'.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul *z*, on a : $\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z|$.

c. En déduire que l'image par *h* de la droite Δ_1 est incluse dans un cercle $\mathcal{X}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure. On admet que l'image par *h* de la droite Δ_1 est le cercle $\mathcal{X}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application *f* de la droite Δ.