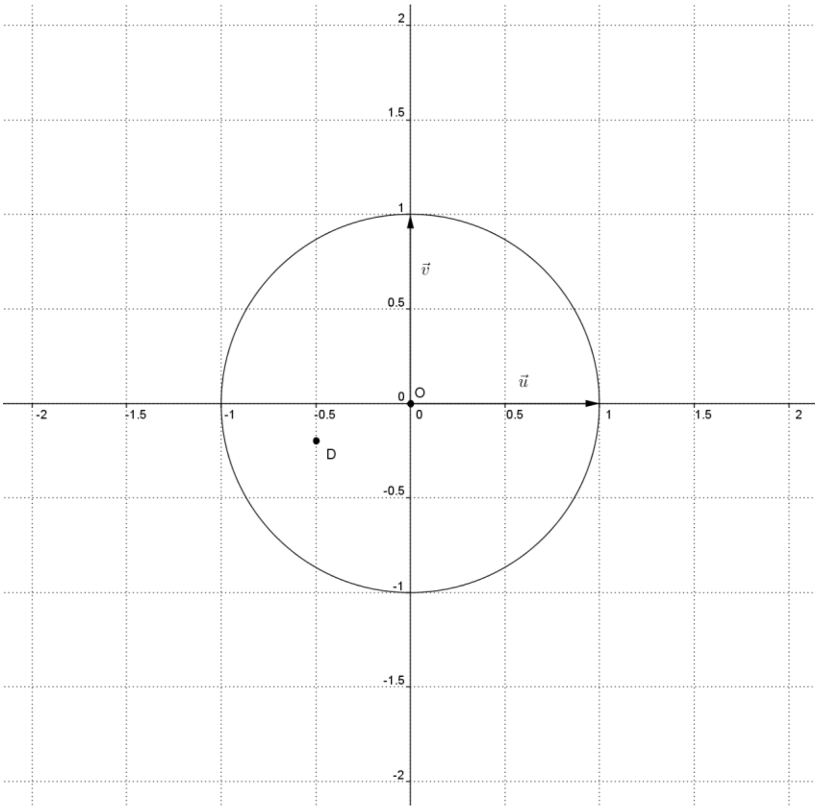
1. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\bar{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est lemodule de z.

On admet l'égalité : $|z|^2 = z\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.



Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et –1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$.

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a. Calculer l'affixe z'_C du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en annexe.

b. Montrer que le point C' appartient au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

c. Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure ci-dessous l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point *A* pour image par la transformation *f*.

3. Montrer que, pour tout point *M* distinct de *A*, le point *M*' appartient au cercle Γ .

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel. Que peut-on en déduire pour les points *A*, *M* et *M*' ?

5. On a placé un point *D* sur la figure. Construire son image *D*' par la transformation *f*.