1. Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle *ABC*.

Partie B

On considère l'application *f* qui, à tout point *M* d'affixe *z* distincte de *i*, associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que :

$$z' = \frac{i\left(z-2+3i\right)}{z-i}.$$

1. Soit *D* le point d'affixe $z_D = 1-i$. Déterminer l'affixe du point *D'* image du point *D* par *f*.

2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté *E*, dont l'image par l'application *f* est le point d'affixe 2*i*.

b. Démontrer que *E* est un point de la droite (*AB*).

3. Démontrer que, pour tout point *M* distinct du point *B*, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

4. Démontrer que, pour tout point *M* distinct du point *A* et du point *B*, on a l'égalité $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\ ;\overrightarrow{AM}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

5. Démontrer que si le point *M* appartient à la médiatrice du segment [*AB*] alors le point *M'* appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point *M'* appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point *B*, alors le point *M* appartient à la droite (*AB*).