1. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par *A* le point d'affîxe *i* et par *f* l'application du plan dans lui-même qui à tout point *M* d'affixe *z,* distincte de *i*, associe le point *M*' d'affixe *z'* telle que : $z' = \dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$.

1. Calculer l'affixe du point *B'*, image du point *B* d'affixe $2-i$ par l'application *f*. Placer les points *B* et *B'* sur une figure que l'on fera sur la copie.

2. Démontrer que l'application *f* n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.

3. a. Vérifier que, pour tout nombre complexe *z*, $\overline{z-i} = \overline{z}+i$.

b. Démontrer que *OM*' = 1 et interpréter géométriquement ce résultat.

c. Démontrer que pour tout point *M* distinct de *A*,

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = 2\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$

d. En déduire une méthode de construction de l'image *M'* d'un point quelconque *M* distinct de *A*.

4. Soit (d) la droite passant par le point *A* et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Dessiner la droite (d).

b. Déterminer l'image par l'application *f* de la droite (d) privée du point *A*.