## *1. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)*

Dans le plan complexe (P)muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point *A* d'affixe *a* = −1 et l'application *f* , du plan (P) dans lui·même, qui au point *M* d'affixe *z*, distinct de *A*, associe le point *M*' = *f*(*M*) d'affixe *z*' tel que : $z' = \dfrac{iz}{z+1}$ .

1. Déterminer l'affixe des points *M* tels que *M*' = *M*.

2. Démontrer que pour tout point *M* distinct de *A* et de *O*, on a : $OM' = \dfrac{OM}{AM}$ et

$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à $2\pi$ près.

3. a. Soit *B* le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2} + i$ . Placer dans le repère le point *B* et lamédiatrice ( $\Delta$ ) du segment [*OA*].

b. Calculer sous forme algébrique l'affixe *b*' du point *B*' image du point *B* par *f*.

Établir que *B*' appartient au cercle (C) de centre *O* et de rayon 1.

Placer le point *B*' et tracer le cercle (C) dans le repère.

c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point *M* appartient à la médiatrice ( $\Delta$ ), son image *M*' par *f* appartient au cercle (C).

d. Soit *C* le point tel que le triangle *AOC* soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point *C* par *f* (on laissera apparents les traits de construction).

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points *M* distincts de *A* et de *O* dont l'image *M*' par *f* appartient à l'axe des abscisses.

*Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.*

a. On pose $z = x + iy$ avec *x* et *y* réels tels que (*x*, *y*) $\neq$ (−1, 0) et (*x*, *y*) $\neq$ (0, 0).

Démontrer que la partie imaginaire de *z*' est égale à : $\mathrm{Im}\left(z'\right) = \dfrac{x^2+y^2+x}{\left(x+1\right)^2+y^2}$ .

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble ( $\Gamma$ ) et le tracer dans le repère.

b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble ( $\Gamma$ ).