

1. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z'+2i)(z-i) = 1$.

b. En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) : $BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b, placer le point E' associé au point E par l'application f .
On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?