1. Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application *f* du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que :

$$z' = z^2 - 4z\,.$$

1. Soient *A* et *B* les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a. Calculer les affixes des points *A'* et *B'* images des points *A* et *B* par *f*.

b. On suppose que deux points ont la même image par *f*. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit *I* le point d'affixe −3.

a. Démontrer que *OMIM'* est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

b. On considère les points *J* et *K* d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points *M* du cercle (C) de centre *J* et de rayon 2 ont leur image *M'* sur un cercle que l'on déterminera.

c. Soit *E* le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du 3. a. qu'il existe deux points dont l'image par *f* est le point *E*. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.