EXERCICE 2 *(5 points)* pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$, d'unité graphique 4 cm, on note :

A le point d'affixe 1, B le point d'affixe *i*, (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (D) la droite d'équation $y = 1$.

À tout point M du plan, d'affixe *z* distincte de *i*, on associe le point M' d'affixe *z'*, telle que $z' = \frac{z-i}{\bar{z}+i} = i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de *z*.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe *z*, avec *z* distinct de *i*, tels que $z' = 1$.

(1 point)

2. *a*) Montrer que, pour tout *z* distinct de $i, z'\overline{z'} = 1$. (0,25 point)

Interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à la droite (D), $\frac{z'-1}{z-i}$ est un imaginaire pur. (0,5 point)

En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires. (0,5 point)

c) Déduire des questions **2.** *a*) et *b*) une construction du point M' lorsque M est un point non situé sur la droite (D). (0,5 point)

Préciser la position du point M' lorsque M appartient à la droite (D) privée du point B.

(0,25 point)

3. *a*) Soit P un point du cercle (C), distinct du point A.

En utilisant la question **2.** *b*), représenter l'ensemble E des points M tels que M' = P.

(0,5 point)

b) Résoudre dans C l'équation $z^3 = 1$. (0,5 point)

c) En utilisant ce qui précède, et sans aucun calcul, représenter l'ensemble F des points M dont les affixes *z* sont les solutions dans C de l'équation : $\left(\frac{z-i}{\bar{z}+i}\right)^3 = 1$. (0,5 point)