

EXERCICE 2 (5 points) candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I milieu de $[AB]$ (on prendra 2 cm pour unité graphique).

On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A , d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{2z}{z - 2i}.$$

1. a) Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe. (0,5 point)

b) Déterminer les images par f des points B et I . (0,5 point)

2. Soit M un point quelconque distinct de A et de O .

Établir que :

$$\begin{cases} (\vec{u}, \overline{OM'}) = (\overline{MA}, \overline{MO}) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2 \frac{MO}{MA}. \quad (1,5 \text{ point}) \end{cases}$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de $[OA]$.

Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera. (1 point)

4. Soit (Γ) le cercle de diamètre $[OA]$, privé du point A . Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera. (1 point)

5. Tracer (Δ) , (Γ) , (C) , (D) sur une même figure. (0,5 point)