

EXERCICE 2 (5 points) candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 3 cm).

On désigne par A le point d'affixe i .

A tout point M du plan, distinct de A , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{i - z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M' .
2. Etant donné un complexe distinct de i , on pose: $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.

Montrer que :

$$x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

En déduire l'ensemble des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E .

3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM' .

En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O . Dessiner l'ensemble F .