

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z - 3| = |z + 3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n , les points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x) (2 \cos^2(x) - 1) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π .