

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M , distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A' image du point A par la fonction f .
 - b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B' image du point B par la fonction f .
 - c. Sur la copie, placer les points A , B , A' et B' dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Pour les points B et B' , on laissera les traits de construction apparents.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = re^{i\theta}$.
 - a. Montrer que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$.
 - b. Est-il vrai que si un point M , distinct de O , appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque? Justifier.
3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
 - a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
 - b. Soit $z = x + iy$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y .
 - c. Soit M un point, distinct de O , du cercle Γ . Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.